Математика
Тест 5
Кључ за оцењивање

ОПШТЕ УПУТСТВО ЗА ОЦЕЊИВАЊЕ

Кључ за оцењивање дефинише начин на који се оцењује сваки појединих задатак. У општим упутствима за оцењивање дефинисане су оне ситуације које могу да се јаве у одговорима на различита питања, а која је важно да сви оцењивачи реше на јединствен начин.

1. Задатак са исправним поступком и тачним Резултатом (одговором) добија максимални број поена без обзира да ли је рађен на други начин од оног који предвиђа кључ.
2. Бодови се не одбијају ако тачан Резултат (решење, одговор) није уписан у кућицу предвиђену за Резултате.
3. Задатак у коме се појављује мерна јединица добија максималан број поена чак иако та јединица није написана.
4. Максималан број поена добија се за тачно урађен задатак у чијем решењу постоји слика (или цртеж) иако та слика (цртеж) није урађена, осим ако се то изричито тражи.
5. Бодови се не одбијају ако је цртеж у задатку тачно урађен графитном оловком.
6. Прегледач уписује бодове у предвиђену кућицу поред задатка. За погрешно урађен задатак у кућицу уписати нулу, а за неурађен задатак уписати црту.
7. Уколико је ученик написао тачан Резултат (решење) а није урадио поступак у задацима у којима је поступак потребан, добија нула поена.
8. Уколико је ученик уочио грешку и прецртао део поступка и након тога урадио тачно задатак, добија максималан број поена предвиђених за тај задатак.
9. Број π се мора уписивати и током израде задатка и у одговору ако је то у тексту назначено.

1

1. Израчунати:

А) $5 \cdot 102{,}34 \cdot 20$;

Б) $\frac{11}{30} \cdot \frac{7}{12} + \frac{11}{30} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{11}{30} \cdot \left(1\frac{5}{12}\right)$.

Место за рад:

А) $5 \cdot 102{,}34 \cdot 20 = 102{,}34 \cdot 100 = 10234$;

Б) $\frac{11}{30} \cdot \frac{7}{12} + \frac{11}{30} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{11}{30} \cdot \left(1\frac{5}{12}\right) = \frac{11}{30} \cdot \left(\frac{7}{12} - \frac{3}{4} + 1\frac{5}{12}\right) = \frac{11}{30} \cdot \left(\frac{7}{12} - \frac{3}{4} + \frac{17}{12}\right) =$

$\frac{11}{30} \cdot \frac{7-9+17}{12} = \frac{11}{30} \cdot \frac{15}{12} = \frac{11}{24}$.

Поступак обавезан.
Тачан одговор под А) доноси 0,5 поена,
тачан одговор под Б) доноси 0,5 поена.
Укупно 1 поен

А) 10234 Б) 11/24

1

2. Израчунати вредност израза $\frac{(-2)^3}{-2^2} - \frac{(-2)^2}{-2^3}$.

Место за рад:

$$\frac{(-2)^3}{-2^2} - \frac{(-2)^2}{-2^3} = \frac{-8}{-4} - \frac{4}{-8} = 2 + 0{,}5 = 2{,}5.$$

Поступак обавезан.
Укупно 1 поен

2,5

1

3. Одредити линеарну функцију $y = kx + n$ чији график садржи тачке $A(0,–1)$ и $B(–1,0)$.

Место за рад:

График линеарне функције $y = kx + n$ садржи тачке $A(0, –1)$ и $B(–1, 0)$ једино ако је

$$-1 = k\cdot 0 + n \quad \text{и} \quad 0 = k\cdot(-1) + n,$$

то јест $-1 = n$ и $0 = -k + n$. Зато је $n = -1$ и $k = n = -1$, па је тражена линеарна функција $y = -x - 1$.

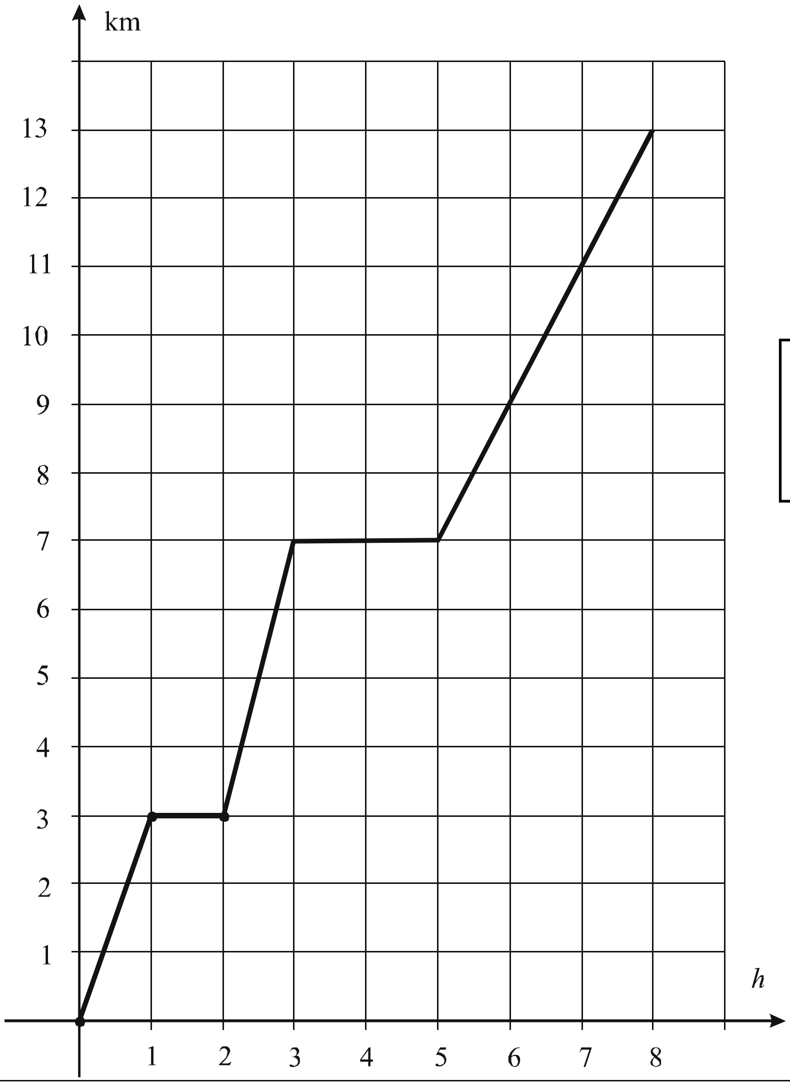
Поступак обавезан.
Тачно израчунато *k* доноси 0,5 поена,
тачно израчунато *n* доноси 0,5 поена.
Укупно 1 поен

Уколико је *k* и *n* израчунато, а линеарна функција није записана,
НЕ одузимати поене.

$y = -x - 1.$

1

4. Ученици једног одељења провели су 8 сати на излету. Првог сата препешачили су 3 km, а затим се један сат одмарали. Следећег сата прешли су још 4 km и, после одмора од два сата, до краја излета прешли још 6 km. Довршити започети дијаграм пута (km) који су ученици прешли у зависности од времена (h).



Тачно довршен започети дијаграм доноси 1 поен.
Укупно 1 поен

1

5. Ако дневно ради 7 часова, један радник посао заврши за 15 дана. Колико часова дневно би радник требало да ради да би исти посао завршио за 12 дана?

Место за рад:

Број часова рада и број радних дана су обрнуто пропорционалне величине. Та обрнута пропорционалност се може представити таблично:

$$\begin{array}{ll} 7\ \text{h}\uparrow & 15\ \text{дана}\downarrow \\ x\ \text{h} & 12\ \text{дана} \end{array}$$

Из

$$x:7 = 15:12,$$

налазимо

$$12x = 7\cdot 15$$

и

$$x = \frac{7\cdot 15}{12} = 8{,}75\ \text{h} = 8\ \text{h}\ \ 45\ \text{min}.$$

Поступак обавезан.
Тачно постављена “формула” доноси 0,5 поена.
Укупно 1 поен

$x = 8$ h 45 min.

1

6. Решити једначину $(2-x)(3-x)-(1-x)(5-x)=0$.

Место за рад:

Множењем одговарајућих израза и сређивањем, добијамо:

$$(2-x)\cdot(3-x)-(1-x)\cdot(5-x) = 0,$$
$$6-2x-3x+x^2-\left(5-x-5x+x^2\right) = 0,$$
$$6-5x+x^2-5+6x-x^2 = 0,$$
$$x+1 = 0,$$
$$x = -1.$$

Решење једначине је $x = -1$.

Поступак обавезан.
Укупно 1 поен

$x=-1$

7. Збир два броја је 136. Одредити те бројеве, ако се зна да је четвртина једног од њих за 8 мања од половине другог.

1

Место за рад:

Ако са x и y означимо тражене бројеве, тада је:

$$x + y = 136$$
$$\frac{x}{4} = \frac{y}{2} - 8 \,\Big/ \cdot 4$$

$$x + y = 136$$
$$x = 2y - 32$$

Заменом вредности за x у прву једначину система, добијамо

$$2y - 32 + y = 136;$$
$$3y = 168;$$
$$y = 56.$$

Сада је

$$x = 2y - 32;$$
$$x = 2 \cdot 56 - 32 = 80.$$

Поступак обавезан.
Тачно постављен систем једначина доноси 0,5 поена.
Укупно 1 поен

Тражени бројеви су 80 и 56.

80 и 56.

8. Једна страница правоугаоника је 12 cm, а његова дијагонала је за 8 cm дужа од друге странице. Одредити површину тог правоугаоника.

1

Место за рад:

Ако је b друга страница тог правоугаоника, његова дијагонала је $d = b + 8$, па на основу Питагорине теореме важи:

$$d^2 = a^2 + b^2,$$
$$(b+8)^2 = 12^2 + b^2,$$
$$b^2 + 16b + 64 = 144 + b^2,$$
$$16b = 144 - 64,$$
$$16b = 80,$$

па је $b = 5\,\text{cm}$.

Тражена површина правоугаоника је $P = ab = 12 \cdot 5$, то јест $P = 60\,\text{cm}^2$.

Поступак обавезан.
Тачно израчуната друга страница правоугаоника доноси 0,5 поена,
тачно израчуната површина правоугаоника доноси 0,5 поена.
Укупно 1 поен

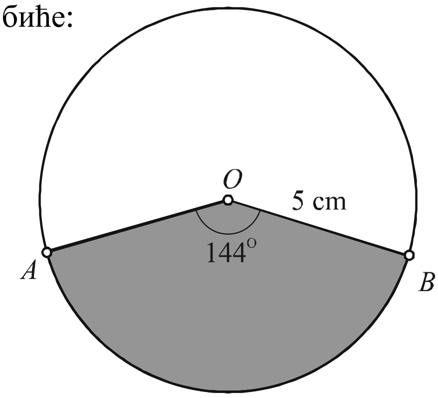
$P = 60\ \text{cm}^2$.

1

9. Ако су подаци као на приложеном цртежу, одредити дужину кружног лука AB и површину одговарајућег исечка ($\pi \approx 3{,}14$).

Место за рад:

Ако је l дужина кружног лука који одговара централном углу α неког круга полупречника r и P површина одговарајућег кружног исечка, биће:



$$l = \frac{2r\pi}{360°}\cdot\alpha \quad \text{и} \quad P = \frac{r^2\pi}{360°}\cdot\alpha = \frac{l\cdot r}{2},$$

па за $r = 5\,\text{cm}$ и $\alpha = 144°$ важи:

$$l = \frac{10\cdot 3{,}14}{360°}\cdot 144°, \qquad l = \frac{3{,}14}{36°}\cdot 144° = 3{,}14\cdot 4.$$

Тражена дужина лука AB је $l = 12{,}56\,\text{cm}$. Тиме је и површина одговарајућег исечка

$$P = \frac{l\cdot r}{2} = \frac{12{,}56\cdot 5}{2} = 6{,}28\cdot 5,$$

то јест $P = 31{,}4\,\text{cm}^2$.

Поступак обавезан.
Тачно израчуната дужина лука *AB* доноси 0,5 поена,
тачно израчуната површина исечка доноси 0,5 поена.
Укупно 1 поен

$P = 31{,}4\ \text{cm}^2$

1

10. Дужине ивица квадра су 3 cm, 4 cm и 12 cm. Одредити површину тог квадра и дужину његове дијагонале.

Место за рад:

Ако су a, b и c ивице квадра, тада је тражена површина:

$$P = 2\left(ab+bc+ac\right),$$
$$P = 2\cdot\left(3\cdot 4+4\cdot 12+3\cdot 12\right),$$
$$P = 2\cdot 96,$$
$$P = 192\,\text{cm}^2.$$

Тражена дијагонала квадра је:

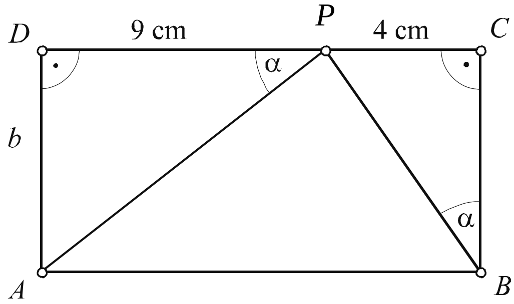
$$D = \sqrt{a^2+b^2+c^2},$$
$$D = \sqrt{3^2+4^2+12^2},$$
$$D = \sqrt{9+16+144},$$
$$D = \sqrt{169},$$
$$D = 13\,\text{cm}.$$

Поступак обавезан.
Тачно израчуната површина квадра доноси 0,5 поена,
тачно израчуната дијагонала квадра доноси 0,5 поена.
Укупно 1 поен

$P = 192\,\text{cm}^2$. $\quad D = 13\,\text{cm}$.

1,5

11. Нека је $ABCD$ правоугаоник. Ако су подаци као на приложеном цртежу, одредити дужину странице $b = AD$.



Место за рад:

Нека је P тачка странице CD за коју је $CP = 4$ cm и $DC = 9$ cm. Троуглови ADP и PCB имају по два подударна угла, па су слични. Зато је

$$AD : PC = DP : CB,$$
$$b : 4 = 9 : b,$$
$$b^2 = 36.$$

Тражена страница правоугаоника $ABCD$ је
$b = 6$ cm.

Поступак обавезан.
Тачно постављена пропорција доноси 1 поен,
(није потребно објашњење о сличности троуглова).
Укупно 1,5 поена

$b = 6$ cm

1,5

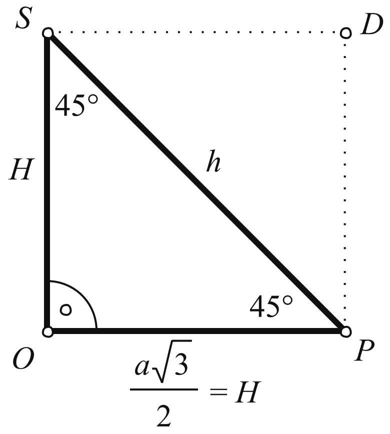
12. Израчунати површину правилне шестостране пирамиде ако је основна ивица 6 cm, а угао између бочне стране и равни основе 45º.

Место за рад:

Троугао OPS је једнакокрако-правоугли, а четвороугао $OPDS$ је квадрат (видети цртеж) странице $\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ cm.

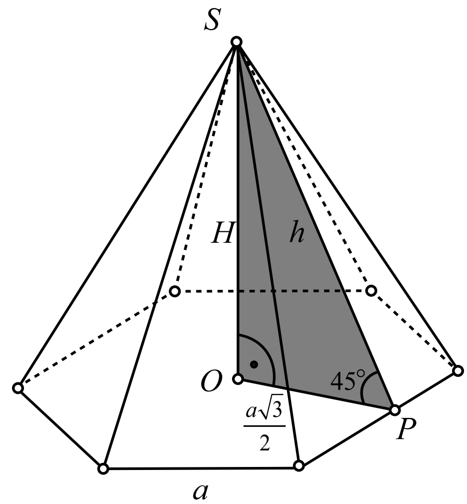
Апотема h пирамиде једнака је дијагонали квадрата $OPDS$ па добијамо:

$$h = OP\cdot\sqrt{2},$$
$$h = 3\sqrt{3}\cdot\sqrt{2},$$
$$h = 3\sqrt{6}\ \text{cm}.$$



Тражена површина је:

$$P = 6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 6\cdot\frac{a\cdot h}{2},$$
$$P = 6\cdot\frac{36\sqrt{3}}{4} + 6\cdot\frac{6\cdot 3\sqrt{6}}{2},$$
$$P = 54\left(\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)\text{cm}^2.$$



Поступак обавезан.
Тачно израчунат крак троугла *OPS* (*OP* или *OS*) доноси 0,5 поена,
тачно израчуната апотема *h* доноси 0,5 поена,
тачно израчуната површина пирамиде доноси 0,5 поена.
Укупно 1,5 поена

$$P = 54\left(\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)\text{cm}^2.$$

13. Раставити на чиниоце изразе: **1**

А) $2ab^2 - 8b$;

Б) $6a^3b - 3ab + 9ab^2$.

Место за рад:

А) $2ab^2 - 8b \;=\; 2b\left(ab-4\right)$;

Б) $6a^3b - 3ab + 9ab^2 \;=\; 3ab\left(2a^2 - 1 + 3b\right)$.

Тачно растављен на чиниоце израз под А) доноси 0,5 поена,
тачно растављен на чиниоце израз под Б) доноси 0,5 поена.
Укупно 1 поен

А) $2b\left(ab-4\right)$; **Б)** $3ab\left(2a^2-1+3b\right)$.

14. За које вредности променљиве x је израз $(2x + 1) \cdot (x - 3) - 2 \cdot (x + 1)^2$ позитиван? **1**

Место за рад:

Бројеви за које је дати израз позитиван су решења неједначине

$$\left(2x+1\right)\cdot\left(x-3\right)-2\left(x+1\right)^2>0.$$

Применом формуле за квадрат бинома добијамо:

$$\left(2x+1\right)\cdot\left(x-3\right)-2\left(x^2+2x+1\right)>0,$$
$$2x^2-6x+x-3-2x^2-4x-2>0,$$
$$2x^2-6x+x-2x^2-4x>3+2,$$
$$-9x>5 \;/\; :\left(-9\right),$$
$$x<-\frac{5}{9}.$$

Израз је позитиван за свако $x\in\left(-\infty,-\frac{5}{9}\right)$.

Поступак обавезан.
Укупно 1 поен

$x\in\left(-\infty,-\frac{5}{9}\right)$ или $x<-\frac{5}{9}$.

1,5

15. Страница ромба је $a = 4$ cm, а један његов угао 60°. Одредити површину круга који је уписан у тај ромб.

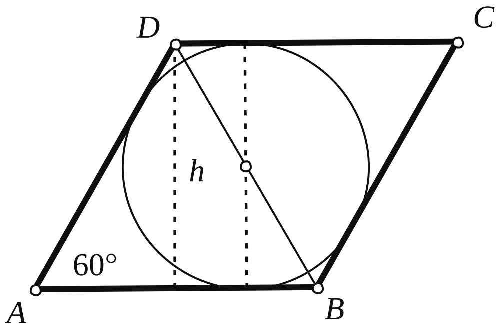
Место за рад:

Ако су ознаке као на цртежу, троугао ABD је једнакокрак и један његов угао је $60°$. Зато је тај троугао и једнакостраничан. Пречник $2r$ уписаног круга у тај ромб је једнак његовој висини h, а тиме и висини једнакостраничног троугла ABD странице $a = 4\text{ cm}$, па на основу Питагорине теореме важи:

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2,$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$h = 2\sqrt{3}\text{ cm}.$$



Како је

$$2r = h,$$

$$2r = 2\sqrt{3},$$

$$r = \sqrt{3}\text{ cm},$$

тражена површина круга је $P = r^2\pi$, то јест $P = 3\pi\text{ cm}^2$.

Поступак обавезан.
Тачно израчуната висина *h* ромба доноси 0,5 поена,
тачно израчунат полупречник круга доноси 0,5 поена,
тачно израчуната површина круга доноси 0,5 поена.
Тачно израчунат полупречник круга без претходно израчунате висине доноси 1 поен.
Укупно 1,5 поена

$P = 3\pi\text{ cm}^2$.

1,5

16. Обим основе праве купе је 18π cm. Изводница купе нагнута је према равни основе под углом од 45º. Израчунати:

А) површину купе;

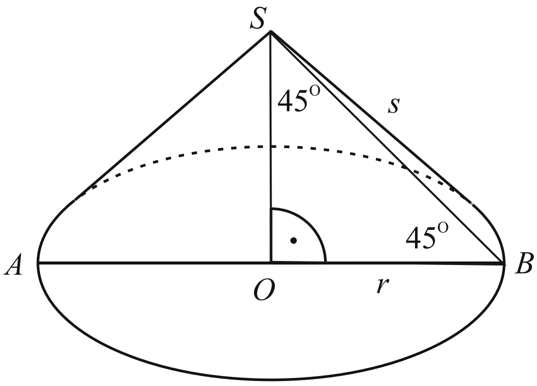
Б) запремину купе.

Место за рад:

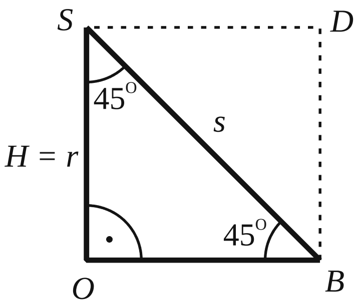
Обим основе купе је $O = 2r\pi$. Према услову задатка је $O = 18\pi$ cm, па добијамо:

$$2r\pi = 18\pi,$$
$$r = 9 \text{ cm}.$$

Троугао OBS је једнакокрако-правоугли, а четвороугао $OBDS$ је квадрат (видети други цртеж). Висина купе једнака је полупречнику основе: $H = r = 9$ cm .



Изводница s купе је дијагонала квадрата $OBDS$, па је $s = 9\sqrt{2}$ cm.



А) Тражена површина је:

$$P = r^2\pi + r\pi s,$$
$$P = 9^2\pi + 9\cdot\pi\cdot 9\sqrt{2},$$
$$P = 81\pi\left(1+\sqrt{2}\right) \text{ cm}^2.$$

Б) Тражена запремина је:

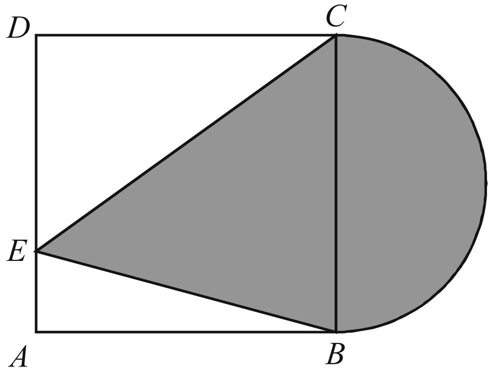
$$V = \frac{1}{3}r^2\pi\cdot H,$$
$$V = \frac{1}{3}\cdot 9^2\pi\cdot 9,$$
$$V = 243\pi \text{ cm}^3.$$

Поступак обавезан.
Тачно одређен полупречник основе купе доноси 0,5 поена,
тачно израчуната површина купе доноси 0,5 поена,
тачно израчуната запремина купе доноси 0,5 поена.
Укупно 1,5 поена

$P = 81\pi\left(1+\sqrt{2}\right) \text{ cm}^2.$ $V = 243\pi \text{ cm}^3.$

2

17. Дијагонала квадрата *ABCD* је 6 cm. Одредити површину осенчене фигуре (у којој је страница *BC* пречник полукруга и *E* било која тачка странице *AD).*



Место за рад:

Страница a квадрата се може добити из

$$a\sqrt{2} = 6,$$

$$a = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}\text{ cm}.$$

Површина осенчене фигуре једнака је збиру површина полукруга полупречника $\frac{a}{2}$ и троугла основице $BC = a$ и висине a:

$$P = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2\pi + \frac{1}{2}a\cdot a = \frac{1}{2}\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2\pi + \frac{1}{2}\left(3\sqrt{2}\right)^2 = \left(9+\frac{9}{4}\pi\right)\text{cm}^2 = 9\left(1+\frac{1}{4}\pi\right)\text{cm}^2.$$

Поступак обавезан.
Тачно израчуната страница квадрата доноси 0,5 поена,
тачно израчуната површина полукруга полупречника *a*/2 доноси 0,5 поена,
тачно израчуната површина троугла *EBC* доноси 0,5 поена.
Укупно 2 поена

$9\left(1+\frac{1}{4}\pi\right)\text{cm}^2$