Вељко Ћировић

Материјал за додатну наставу математике
са ученицима VI разреда

Неки задаци из геометрије троугла и четвороугла

★★★

1 *Задаци*

1. Над страницом AB квадрата $ABCD$ конструисан је једнакостранични троугао $\triangle AMB$. Израчунати колики је угао $\measuredangle DMC$?

2. Дат је троугао $\triangle ABC$ и на страници BC тачка D између темена B и C тако да је $DC = 2BD$. Ако је $\measuredangle ABC = 45°$ и $\measuredangle ADC = 60°$ израчунати колики су углови $\measuredangle BAC$ и $\measuredangle ACB$.

3. Дат је правоугли троугао $\triangle ABC$ са правим углом код темена C. Изван троугла конструисани су квадрати $ANMB$ и $ACPQ$. Ако је тачка R средиште катете BC, а тачке S и T пресеци дијагонала квадрата $ABMN$ и $ACPQ$. Доказати да је троугао $\triangle SRT$ једнакокрак.

4. Кроз свако теме троугла $\triangle ABC$ конструисана је права паралелна са наспрамном страницом. Збир обима свих паралалограма добијених након конструкције ових правих је 2012 cm. Одредити обим троугла $\triangle ABC$.

5. Са исте стране праве a дате су тачке P и Q. Одредити тачку R која припада правој a за коју важи да је збир $PR + RQ$ најмањи.

6. На основицама AB и CD трапеза $ABCD$ $(AB > CD)$ дате су тачке E и F које су њихова средишта. Ако је познато да је $EF = \dfrac{AB - CD}{2}$ одредити збир углова на краћој основици.

7. У унутрашњости конвексног четвороугла $MNPQ$ дата је тачка R. Доказати да је збир $MR+NR+PR+QR$ најмањи ако је R пресек дијагонала овог четворугла.

8. У трапезу $ABCD$ дијагонале секу средњу линију у тачкама које је деле на три једнака дела. Ако је дужа основица $AB = 2012$ cm одредити колика је краћа основица CD.

9. У правоуглом троуглу $\triangle ABC$, са правим углом код темена C, висина и тежишна дуж на хипотенузу деле прав угао на три једнака дела. Колики је угао $\measuredangle BAC$ овог троугла?

10. Дат је четвороугао $ABCD$ обима 28 cm за кога се зна да је централно симетричан и да му је једна од страница 7 cm. Доказати да је овај четвороугао ромб.

11. Ако су a и b катете, c хипотенуза, а r полупречник уписане кружнице правоуглог троугла, доказати да важи $a + b = c + 2r$.

12. Нека је дат ромб $ABCD$ чија је краћа дијагонала једнака страници, и тачке E и F на његовим страницама AB и BC, тако да је $EB + BF = AB$, и нека је тачка G симетрична тачки E у односу на AD. Доказати да је $FG \parallel CD$.

13. Унутрашњи углови троугла односе се као $13 : 16 : 11$. Одредити угао који заклапају симетрала средњег по величини угла овог троугла и висина из темена тог угла на наспрамну страницу троугла.

14. Нормала из темена C правоугаоника $ABCD$ на дијагоналу BD дели ту дијагоналу у односу $1 : 3$. Одредити углове између дијагонала овог правоугаоника.

15. У троуглу $\triangle ABC$ угао α је за $20°12'$ већи од угла β. Ако је тачка D на страници BC, између темена B и C тако да је $AC = CD$ израчунати колики је угао $\measuredangle BAD$.

2 *Сугестије и скице решења*

1. У овом задатку треба анализирати два случаја. Први када је тачка M унутар квадрата, а други када је ван њега. Тражени углови су $150°$ и $30°$.

2. Повући нормалу из темена C на AD и затим анализирати добијене троуглове. Решења су $\measuredangle BAC = 60°$ и $\measuredangle ACB = 75°$.

3. Поред тачке R као средишта странице BC, уочити и средишта остале две странице: L - средиште странице CA и K - средиште странице AB. Сада доказати да су троуглови $\triangle RTL$ и $\triangle RKS$ подударни, а одатле ће следити једнакост дужи SR и RT.

4. Уочити 3 паралелограма. Тражени обим је 503 cm.

5. Одредити тачку P' симетричну са P у односу на a. Пресечна тачка $P'Q \cap a = \{R\}$ је тражено решење. Образложити.

6. Из средишта F основице CD поставити пареллеле са краковима и уочити пресечне тачке тих паралела са већом основицом. На тај начин се дати трапез подели на два паралелограма и два једнакокрака троугла. Одатле се, једноставним извођењем, да показати да је збир углова на краћој основици $270°$.

7. Нека је R пресек дијагонала овог четворугла. Узети било коју тачку S различиту од R у унутрашњости четвороугла, па показати да је збир $MS+NS+PS+QS$ већи од $MR+NR+PR+QR$ за било које такво S. За ово показивање користити важне особине односа страница у троуглу.

8. Краћа основица је $CD = 1006$ cm.

9. Како висина и тежишна дуж на хипотенузу деле прав угао на три једнака дела, то су ти делови по $30°$. Затим уочити неколико карактеристичних правоуглих троуглова (који су половина једнакострачничог са угловима од $30°$, $60°$ и $90°$) и одатле закључити да је тражени угао $\measuredangle BAC = 30°$ (или $\measuredangle BAC = 60°$, што зависи од обележавања, јер је и сам троугао $\triangle ABC$ половина једнакостраничног).

10. Четвороугао $ABCD$ је паралелограм због услова да је централно симетричан. А како му је једна страница 7 cm то је и њој наспрамна толика. Међутим и друге две су једнаке па су због обима од 28 cm и оне по 7 cm, па је овај паралелограм, заиста, ромб.

11. Важи $a = r + (a - r)$, $b = r + (b - r)$ (Приказати помоћном сликом и детаљно образложити). А одатле се сабирањем ова два израза и долази до траженог закључка.

12. Показати да је $ABFG$ једнакокраки трапез. Одатле ће једноставно следити и тражена паралелност.

13. Утврдити да су унутрашњи углови: $58°30'$, 72 и $49°30'$. Даље се усмерити на симетралу и висину из угла $58°30'$. Висина из темена тог угла на наспрамну страницу одређује правоугли троугао, па се из његовоих углова закључује о величини траженог угла.

14. Нека је n нормала из темена C на дијагоналу BD. Означимо са E одговарајући пресек: $n \cap BD = \{E\}$, а са O пресек дијагонала правоугаоника. Једноставним извођењем се добија да је $BE = EO$ и $OD = 2BE = 2EO = OC = OA$ а одавде и да је троугао $\triangle BCO$ једнакостраничан, а углови између дијагонала $60°$ и $120°$.

15. Посматрати једнакокраки троугао $\triangle ADC$ и применити правило за збир унутрашњих углова. Решење је $\measuredangle BAD = 10°6'$.