Републичко такмичење из математике 1996. године

Шести разред

1. Четири друга су заједнички купили компијутер. Први је платио 50% од вредности компијутера, други је дао трећину суме коју су дала остала тројица, а трећи је уплатио 25% од суме коју су дала остала тројица. Четврти је дао 500 динара. Колика је цена компијутера?

2. Производ једног двоцифреноги једног троцифреног природног броја записује се у декадном запису само помоћу неколико цифри 2. Одредити о којим бројевима је реч.

3. У неједнакокраки троугао ABC уписан је круг k, чији центар је тачка O. Кроз тачку O, конструисане су праве p и q, тако да је $p||AC$ и $q||BC$. Ако права p сече страницу AB у тачки M онда је обим троугла OMN једнак дужини странице AB. Доказати.

4. У неједнакокраком трапезу један крак је већи од другог за 4 *cm*, а већи крак је за 2 *cm* мањи од веће основице. Збир мање основице и кракова једнак је 40 *cm*, а једна од дијагонала полови угао на основици. Одредити странице тог трапеза. Колико различитих решења има?

5. Једнакостранични троугао чија је страница 1996 *dm* треба у потпуности поплочати плочицама облика једнакостраничног троугла странице 1 *dm*, тако да се плочице не смеју прекривати. Колико плочица је потребано за такво поплочавање?

Седми разред

1. Књиге су сложене у кутије. У свакој кутији је једнак број књига. Магационер вади једну по једну књигу из кутије, пакује их и адресира претплатницима. Први магационер целу кутију препакује за 3 сата и 36 минута, а други исту такву кутију препакује за 2 сата и 6 минута, при чему је брзина паковања за сваког магационера стална.
   (а) Ако је за неко време први спаковао 63 књиге, колико је књига, за исто време, спаковао други магационер?
   (б) Ако за паковање једне књиге сваком од магационера треба цео број минута, колико највише књига може бити споковано у једну кутију?

2. Дат је полином $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$
   (а) Ако је p прост број већи од 3, онда је $P(p)$ дељиво са 24. Доказати.
   (б) Одредити најмањи прост број такав да је $P(p)$ дељиво са 120.

3. Дат је неједнакокраки троугао ABC. Нека је тачка H ортоцентар, а O центар круга описаног око троугла ABC и нека праве CH и CO секу круг описан око троугла ABC у тачкама M и N. Доказати да су тачке A, B, M и N темена једнакокраког трапеза.

4. У неједнакокраком трапезу дијагонале $m = AC = 2\ cm$ и $n = BD = 15\ cm$ секу се под правим углом. Израчунати обим и површину тог трапеза , ако је дужа основица трапеза $a = 21\ cm$.

5. Ортоцентар H троугла ABC дели висину AA' тако да је $AH : HA' = 1 : 1$ и висину BB' тако да је $BH : HB' = 2 : 1$. Израчунати однос $CH : HC'$ у коме ортоцентар дели трећу висину троугла.

Осми разред

1. Нека је $S = p_1^{1996} + p_2^{1996} + \dots + p_{1996}^{1996}$, где су бројеви $p_1, p_2, \dots , p_{1996}$ првих 1996 простих природних бројева. Доказати да је S дељово са 5.

2. Аутомобил је превалио растојање од града A до града B за 5 сати, а у обрнутом смеру оде B до A за 4 сата. При том се узбрдо кретао брзином , по равном путу брзином од и низбрдо брзином од. Колико је растојање од града A до града B?

3. У квадрату $ABCD$ конструисан је полукруг k над дужи AB као пречником. Затим је конструисан кружни лук $l = AC$ са центром B, полупречника $AB = BC$. Нека је P произвољна тачка на луку l, M пресечна тачка дужи BP и полукруга k и N подножје нормалне из P на страницу квадрата AD. Доказати да је $MP = NP$.

4. Темена датог троугла ABC налазе се са исте стране равни α и удаљена су од ње за 24 cm, 30 cm, 39 cm, редом. Одредити колико је од равни удаљено тежиште T троугла ABC.

5. Дата су три тврђења:
   (1) број $n + 29$ је потпун квадрат неког природног броја;
   (2) број n се завршава цифром 8;
   (3) број $n - 60$ је потпун квадрат неког природног броја.

   Одредити природан број n, ако се зна да су два од датих тврђења тачна, а једно нетачно.