Министарство просвете Републике Србије

ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

15.05.2010.

VI РАЗРЕД

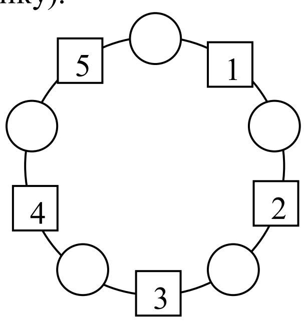
1. Одреди просте бројеве p, q, r, s и t, такве да је

$$p \cdot q \cdot r \cdot (s + t) = 2010.$$

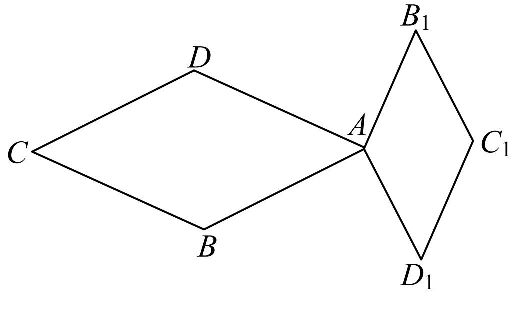
Бројеви не морају сви бити међусобно различити.

2. Нека је тачка M на страници BC, а тачка K на страници AC троугла ABC. Да ли дужи AM и BK могу да се секу тако да тачка пресека полови ове дужи?

3. У сваки кружић упиши по један број тако да је сваки број у квадратићу једнак збиру бројева у два њему суседна кружића (види слику).



4. Ромб $ABCD$ и ромб $AB_1C_1D_1$ имају заједничко теме A и при томе је $\measuredangle DAB_1 = \measuredangle BAD_1$ (види слику). Докажи да средина дужи BD_1, пресек дијагонала ромба $ABCD$ и пресек дијагонала ромба $AB_1C_1D_1$ су темена једнакокраког троугла.



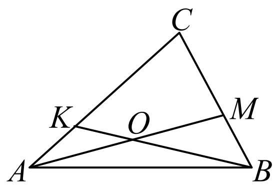
5. На математичком такмичењу учествовало је 2010 ученика. Докажи да се међу њима може изабрати 45 ученика таквих да су или сви из истог града или сви из различитих градова.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 180 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - VI РАЗЕД

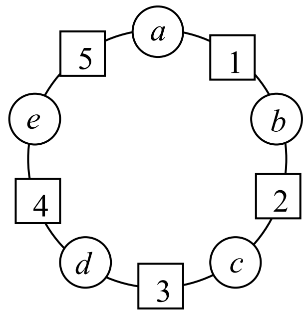
1. Како је $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$, то је $\{p, q, r, s + t\} = \{2, 3, 5, 67\}$. Како $s + t$ не може бити 2 или 3 јер не постоје прости бројеви s и t чији је збир 2 или 3, то је $s + t = 5$ или $s + t = 67$. Ако је $s + t = 5$ тада су s и t бројеви 2 и 3, а p, q, r узимају вредности из скупа $\{2, 3, 67\}$. У случају $s + t = 67$ нема решења јер ако је један број 2 други је 65, који није прост, а ако су s и t неки други прости бројеви они су непарни, па њихов збир мора бити паран број. Дакле, решења су:
$(p, q, r, s, t) \in \{(2, 3, 67, 2, 3), (2, 67, 3, 2, 3), (3, 2, 67, 2, 3), (3, 67, 2, 2, 3), (67, 2, 3, 2, 3), (67, 3, 2, 2, 3), (2, 3, 67, 3, 2), (2, 67, 3, 3, 2), (3, 2, 67, 3, 2), (3, 67, 2, 3, 2), (67, 2, 3, 3, 2), (67, 3, 2, 3, 2)\}$.

2. Нека се дужи AM и BK секу у тачки O. Ако се ове дужи полове, онда је $\Delta ABO \cong \Delta MKO$ ($AO = OM$, $BO = OK$, $\measuredangle AOB = \measuredangle MOK$) па је $AB = KM$. Аналогно, из подударности троуглова AOK и MOB имамо да је $AK = MB$. Како су наспрамне странице четвороугла $ABMK$ једнаке, он је паралелограм, а како су тачке M и K на страницама троугла, то је немогуће, па дужи AM и BK не могу да се полове.

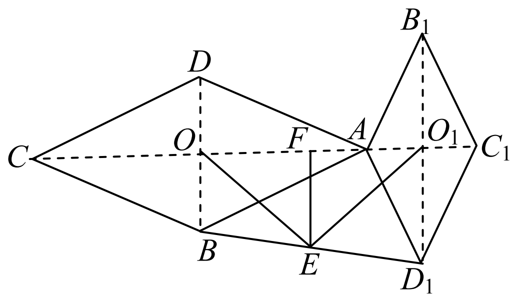


3. Означимо бројеве у кружићима као на слици. Имамо да је
$b = 1 - a$, $c = 2 - b = 1 + a$; $d = 3 - c = 2 - a$ и $e = 4 - d = 2 + a$.
Како је $a + e = 5$, то је $2 + 2a = 5$, одакле је $a = \frac{3}{2}$, па добијамо и остале бројеве

$$b = -\frac{1}{2},\ c = \frac{5}{2},\ d = \frac{1}{2},\ e = \frac{7}{2}.$$



4. **I начин**: Како је $\measuredangle DAB_1 = \measuredangle BAD_1$ и како дијагонала дели унутрашњи угао ромба на два једнака дела, то је $\measuredangle DAO = \measuredangle BAO$ и $\measuredangle B_1AO_1 = \measuredangle D_1AO_1$, па је $\measuredangle OAO_1 = 180°$, одакле закључујемо да су тачке O, A и O_1 колинеарне. Нека је тачка F подножје нормале из тачке E на праву OO_1. Како је тачка E средиште дужи BD_1 и $EF \parallel BO \parallel D_1O_1$, то је EF средња линија трапеза, одакле је тачка F средиште дужи OO_1. Дакле, тачка E се налази на симетрали дужи OO_1, па је троугао OEO_1 једнакокраки.



II начин: $\Delta ADD_1 \cong \Delta ABB_1$ јер је $\measuredangle B_1AB = \measuredangle B_1AD + \measuredangle DAB = \measuredangle D_1ABD + \measuredangle DAB = \measuredangle D_1AD$, $AB = AD$ и $AB_1 = AD_1$ па је $DD_1 = BB_1$. Како се дијагонале ромба полове и тачка E је средиште дужи BD_1 имамо $EO = \frac{1}{2}DD_1$ и $EO_1 = \frac{1}{2}BB_1$ као средње линије троуглова BDD_1 и D_1BB_1, одакле је $EO = EO_1$, па је троугао EOO_1 једнакокрак.

5. Претпоставимо да су на такмичењу ученици из највише 44 града и да из сваког града има највише 44 ученика. Тада је на такмичењу највише могло да буде 1936 ученика. Како је на такмичењу било више од 1936 учесника, ако бисмо претпоставили да је неко од преосталих такмичара из неког од датих градова, он би био 45. такмичар из тог града, а ако бисмо претпоставили да је из неког другог од понуђених градова то би био 45. град одакле има такмичара, па важи тврђење задатка.

Министарство просвете Републике Србије

ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

15.05.2010.

VII РАЗРЕД

1. Природан број n при дељењу са 3 даје остатак a, при дељењу са 6 даје остатак b, а при дељењу са 9 даје остатак c. Ако је $a + b + c = 15$ одреди остатак при дељењу броја n са 18.

2. Нека су a, b и c природни бројеви који су дужине страница троугла у центиметрима. Једна висина тог троугла једнака је збиру друге две. Докажи да је $a^2 + b^2 + c^2$ квадрат неког природног броја.

3. У земљи Чуда цене се мењају свакога дана. Првог дана се повећају за 1%, наредног дана се смање за 1%, затим се следећег дана поново повећају за 1%, па се наредног опет смање за 1%, и тако даље. Да ли је цена после 2010 дана иста као на почетку?

4. Дат је квадрат $ABCD$. У спољашњости квадрата конструисане су полукружнице k_1 и k_2 над пречницима AB и BC, редом. Права кроз теме B сече k_1 у тачки M, а k_2 у тачки N. Докажи да су дужи CM и DN нормалне.

5. Да ли је могуће заменити слова цифрама (различита слова различитим цифрама) тако да буде тачна једнакост:

$$ZEC + VUK + SLON = 2010?$$

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 180 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - VII РАЗЕД

1. Број n можемо записати у облику

$$n = 3p + a,\ 0 \le a \le 2; \quad n = 6q + b,\ 0 \le b \le 5; \quad n = 9r + c,\ 0 \le c \le 8; \quad 0 \le a + b + c \le 15.$$

С обзиром да је $a + b + c = 15$, то следи да је $a = 2;\ b = 5;\ c = 8.$ Тада је $n + 1 = 3p + 3 = 6q + 6 = 9r + 9.$ Дакле, $n + 1$ је дељиво са 3, 6 и 9, тј. дељиво је са 18. Значи да је $n + 1 = 18k$, па је $n = 18k – 1$, што значи да је остатак при дељењу са 18 једнак 17.

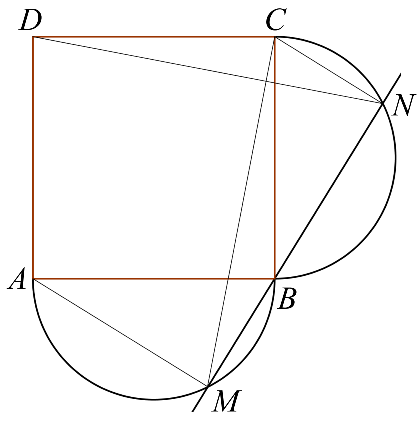
2. Нека је $h_a = h_b + h_c$. Из $2P = a \cdot h_a = b \cdot h_b$ добијамо да је $\frac{h_c}{a} = \frac{h_a}{c}$ и $\frac{h_b}{a} = \frac{h_a}{b}$. Тада је $\frac{h_c + h_b}{a} = h_a \cdot \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{b}\right)$, односно, $\frac{1}{a} = \frac{1}{c} + \frac{1}{b}$. Сада је $\frac{1}{a^2} = \frac{b^2 + 2bc + c^2}{b^2c^2}$, односно,

$$b^2c^2 = a^2\left(b^2 + 2bc + c^2\right).$$

Одавде је $\left(a^2 - bc\right)^2 = a^2\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$. Одавде закључујемо да је $a^2 + b^2 + c^2$ природан број и да је то квадрат природног броја јер је $a^2 + b^2 + c^2 = \left(\frac{a^2 - bc}{a}\right)^2$.

3. Нека је цена неке робе x. Првог дана цена те робе је $101\%x = 1,01 \cdot x$. Другог дана цена те робе је $99\% \cdot (1,01 \cdot x) = 0,99 \cdot (1,01 \cdot x) = (0,99 \cdot 1,01) \cdot x.$ Понављајући ово за 2010 дана имамо да је након 2010 дана цена те робе $(0,99 \cdot 1,01)^{1005} \cdot x = (0,9999)^{1005} \cdot x.$ Како је $0,9999 < 1$, то је $(0,9999)^{1005} < 1$, одакле закључујемо да су цене робе после 2010 дана ниже него првог дана.

4. $\measuredangle ABM + \measuredangle CBN = 90°$. $\measuredangle BNC$ је периферијски угао над пречником BC па је прав. Одавде је $\measuredangle ABM = \measuredangle BCN$. Како су полукружнице k_1 и k_2 подударне (имају једнаке пречнике) и како једнаким периферијским угловима одговарају једнаке тетиве, то је $AM = BN$. Сада имамо да је $\Delta MBC \cong \Delta NCD$ одакле је $\measuredangle BCM = \measuredangle CDN$. Како је један пар кракова ових углова нормалан (BC и CD) то закључујемо да је и други пар кракова нормалан, односно $CM \perp DN$.



5. Није могуће. У противном би збир $(Z + E + C) + (V + U + K) + (S + L + O + N)$ био једнак 45, тј. дељив са 9 (јер се свака цифра појављује тачно једанпут), а самим тим би и збир $ZEC + VUK + SLON$ био дељив са 9. Међутим, 2010 није дељиво са 9.

Министарство просвете Републике Србије

ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

15.05.2010.

VIII РАЗРЕД

1. Реши систем једначина

$$|x| + y + z = 2009$$
$$x + y + z = 2010$$
$$x + y + 2z = 2011.$$

2. Дат је једнакостранични троугао ABC. Над страницом BC, као пречником, конструисана је полукружница у спољашњости троугла. Тачке D и E деле полукружницу на три једнака дела. Докажи да дужи AD и AE деле страницу BC на три подударне дужи.

3. На свакој страни коцке написан је по један природан број. На теменима коцке написан је број који је једнак производу бројева који су написани на странама коцке које одређују то теме. Нађи збир свих бројева написаних на странама коцке ако је збир бројева написаних на теменима једнак 105.

4. Збир три ивице правилне n-тостране призме које полазе из једног темена те призме је 100. Колика је највећа могућа површина омотача те призме?

5. Квадрат 19 × 19 подељен је на јединичне квадрате (поља). Обојено је 95 поља. Докажи да постоји правоугаоник 5 × 3 (који се састоји од 15 поља) у коме се налазе највише три обојена поља.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 180 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - VIII РАЗЕД

1. Одузимајући другу од треће једначине система добијамо $z = 1$, па се систем своди на

$$\begin{cases} |x| + y = 2008 \\ x + y = 2009 \end{cases}.$$

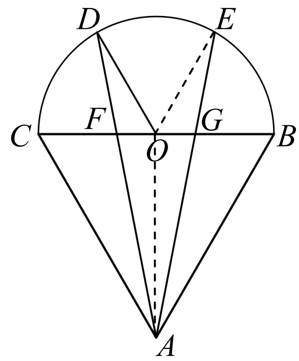
Одузимајући другу од прве једначине система добијамо једначину $|x| - x = -1$. Разматрајући случајеве по x имамо:

i) $x \geq 0$. $x - x = -1$, $0 = -1$ па једначина нема решења у овом случају.

ii) $x < 0$. $-x - x = -1$, одакле је $x = \frac{1}{2}$ па ни у овом случају једначина нема решења.

Дакле, закључујемо да полазни систем нема решења.

2. Нека је O центар полукружнице (средиште странице BC). Троугао ODC је једнакостраничан и поред тога је страница троугла ODC два пута мања од странице троугла ABC. Како су одговарајући углови троуглова ODF и CAF једнаки, они су слични, а на основу претходног је $CF = 2FO$. Аналогно показујемо да је $GB = 2GO$. Сада тврђење задатка следи на основу чињенице да је $OB = OC$.



3. Нека су на супротним странама коцке записани природни бројеви a и x, b и y, c и z. Тада је:

$$abc + abz + ayz + acy + xbc + xbz + xyz + xcy = 105$$
$$a(bc + bz + yz + cy) + x(bc + bz + yz + cy) = 105$$
$$(a + x)(b(c + z) + y(z + c)) = 105$$
$$(a + x)(b + y)(c + z) = 105$$

Како су сви бројеви природни, то је сваки чинилац последњег производа већи од 1, а како је $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ то су бројеви $a + x$, $b + y$ и $c + z$ различити бројеви из скупа $\{3, 5, 7\}$. Дакле, збир свих бројева на странама коцке је $3 + 5 + 7 = 15$.

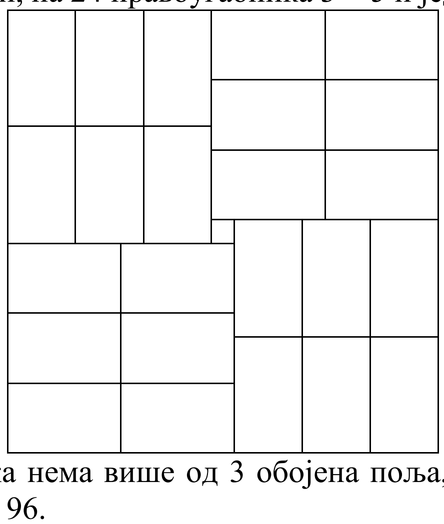
4. Означимо основну ивицу са a, а висину са b.Тада је $2a + b = 100$. Површина омотача ће бити највећа када израз nab, тј. ab има највећу вредност. Имамо да је:

$ab = a(100 - 2a) = -2a^2 + 100a = -2(a^2 - 50a)$

$= -2(a^2 - 50a + 625 - 625) = -2(a - 25)^2 + 1250.$

ab има највећу вредност када је $a - 25 = 0$, тј. $a = 25$. Дакле, највећа површина је $1250n$.

5. Поделимо квадрат као на слици, на 24 правоугаоника 3×5 и један квадрат.



Бар у једном од правоугаоника нема више од 3 обојена поља, јер би у супротном укупан број обојених поља био бар $4 \cdot 24 = 96$.