

Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

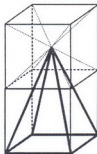
09.05.2009.

VIII РАЗРЕД

1. Одреди све вредности реалних бројева a, b, c и d за које је:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a \cdot (b + c + d).$$

2. Дате су две исте коцке. Једна је стављена на другу тако да формирају квадар. Направљена је пирамида чији је врх средиште горње коцке, а основа основа доње коцке (види слику). Одреди који део запремине пирамиде је у горњој коцки у односу на запремину читаве пирамиде.



3. Нека је $x \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$. Одреди све вредности за x за које важи:

$$\frac{x^{2009} + 1}{2} + \frac{2x^{2009} + 1}{3} + \dots + \frac{n \cdot x^{2009} + 1}{n+1} = n.$$

4. Странаца квадрата је дужине a . Нека је M средиште стране BC , а X подножје нормале из темена A на дуж MD . Изрази обим троугла ABX у зависности од стране a .

5. Докажи да је

$$\frac{1}{2009} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2007}{2008} < \sqrt{\frac{1}{2009}}.$$

— Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

— Израда задатака траје 180 минута.

— Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

09.05.2009.

ВИИ РАЗРЕД

1. Ако $13 \mid (a^2 + b^2)$, докажи да $13 \mid (2a + 3b) \cdot (3a + 2b)$.
2. У круг полупречника 1 су уписани правоугаоник $ABCD$, са страницама $AB = a$ и $BC = b$, и једнакокраки троугао CDE са основицом CD . За које вредности странице b троугао CDE и правоугаоник $ABCD$ имају једнаке површине.
3. Одреди све природне бројеве x и y такве да је
$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2009}.$$
4. Две наспрамне странице конвексног четвороугла леже на узајамно нормалним правима и њихове дужине су 8cm и 6cm. Одреди дужину дужи која спаја средишта дијагонала тог четвороугла.
5. Бранко је изабрао 4 броја. Воја је за свака два Бранкова броја израчунао разлику већег и мањег броја и добио бројеве:
2, 2, 3, 4, 5, 6.
Вера тврди да је Воја погрешно у рачуну. Да ли је Вера у праву?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 180 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

09.05.2009.

VI РАЗРЕД

1. Одреди целе бројеве x , y и z такве да је $x < y < z$ и $x \cdot y \cdot z = 2009$.
2. Дате су 4 „плаве“ и 5 „црвених“ тачака, тако да нема три колинеарне тачке (од тих 9 тачака). Колико троуглова, чија сва темена нису исте боје, одређују ове тачке?
3. Ако Вера уложи у банку 25000 динара на годину дана добиће камату од $p\%$. На сав новац који уложи преко 25000 динара добија $(p+2)\%$ камате. Колико новца је Вера уложила у банку ако је укупна камата за годину дана била $(p+0,4)\%$?
4. Дат је оштроугли разностранични троугао ABC са ортоце-нтром H и центром описане кружнице O . Нека је D пресечна тачка праве BO и описане кружнице ($B \neq D$). Докажи да је четвороугао $AHCD$ паралелограм.
5. Број је леп ако је непаран и једнак збиру три узастопна цела броја. Докажи да:
 - а) збир два лепа броја није леп,
 - б) производ два лепа броја јесте леп број.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 180 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.