Подружница математичара Ваљево
Ваљевска гимназија

МАТЕМАТИЧКИ ТУРНИР „ИНТЕГРАЛ КУП”

Ваљево, 03. 12. 2016.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

КАТЕГОРИЈА 1 - ШЕСТИ РАЗРЕД

(I) **Алгебра и бројеви**

Број задатка	1	2	3
Тачан одоговор	**А**	**В**	**Б**

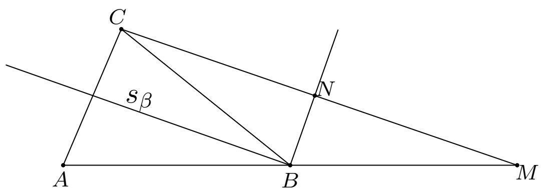
Задатак 4. Како је $\overline{ABCABC} = 1001 \cdot \overline{ABC}$, а $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, то је једино могуће решење, с обзиром да су A, B и C различите цифре, $A = 7$, $B = 1$, $C = 3$.

(II) **Геометрија**

Број задатка	1	2	3
Тачан одоговор	**Д**	**В**	**Б**

Задатак 4. Троугао BMC је једнакокраки, па је симетрала $\measuredangle MBC$ исто-времено и висина која одговара страници MC. Дакле, важи $BN \perp MC$.

За троугао ABC, угао $\measuredangle MBC$ је спољашњи и BN као његова симетрала, је нормална на симетралу угла $\measuredangle ABC$, одакле следи да су MC и s_β паралелне.



(III) **Комбинаторика**

Број задатка	1	2	3
Тачан одоговор	**Б**	**Д**	**Г**

Задатак 4. Прва цифра може бити из скупа $\{2, 4, 6, 8\}$, друга из скупа $\{2, 3, 5, 7\}$, трећа из $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ и четврта из скупа $\{0, 3, 6, 9\}$, тако да оваквих бројева има укупно $4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 320$.

КАТЕГОРИЈА 2 - СЕДМИ И ОСМИ РАЗРЕД

(I) **Алгебра и бројеви**

Број задатка	1	2	3
Тачан одоговор	**Г**	**В**	**Д**

Задатак 4. Како је $3n$ трећи степен природног броја, то је број појављивања сваког простог чиниоца у $3n$ дељив са 3. Дакле број појављивања простог чиниоца 3 у n при дељењу са 3 даје остатак два (да би у $3n$ био дељив са 3), а број појављивања сваког другог простог чиниоца у n је дељив са 3. Како је $4n = 2 \cdot 2 \cdot n$ четврти степен природног броја то је број појављивања сваког простог чиниоца у $4n$ дељив са 4. Дакле број појављивања простог чиниоца 2 у n при дељењу са 2 даје остатак два, а број појављивања сваког другог простог чиниоца у n је дељив са 4. Како се тражи најмањи број n, закључујемо да n, осим 2 и 3 нема других простих чинилаца.

Одатле следи да број чинилаца у n који су једнаки 3 мора при дељењу са 3 дати остатак 2 и бити дељив са 4. Најмањи такав број је 8. Слично, број чинилаца у n који су једнаки 2 мора бити дељив са 3, а при дељењу са 4 дати остатак 2. Најмањи такав број је 6. Дакле тражени број је $n = 2^6 \cdot 3^8$.

(II) **Геометрија**

Број задатка	1	2	3
Тачан одоговор	**Д**	**В**	**Б**

Задатак 4. Означимо са P средиште крака BC, а са Q средиште крака DA. Јасно да су овако изабране тачке P и Q центри одговарајућих кру-жница из задатка. Користићемо следећу једноставну чињеницу :
За произвољне три тачке P, Q, R, важи да је $PR \leq PQ + QR$, при чему једнакост важи само ако су ове три тачке колинеарне и Q је између P и R. Дакле,

$$\begin{aligned} ML \leq MP + PL &\leq MP + PQ + QL \\ &= \frac{BC}{2} + \frac{AB + CD}{2} + \frac{AD}{2} \\ &= \frac{AB + BC + CD + DA}{2} \\ &= \frac{2016}{2} = 1008 \end{aligned}$$

Одакле закључујемо да ML не може бити веће од 1008 као и да је једнако 1008 само ако су тачке M, P, Q, L колинеарне и P је између M и L, а Q између P и L. Права PQ сече кружнице k_1 и k_2 јер пролази кроз њихове центре, па ако за M и L узмемо оне пресеке праве PQ и кружница k_1 и k_2 који се налазе у спољашњој области трапеза, имаћемо да је $ML = 1008$.

(III) **Комбинаторика**

Број задатка	1	2	3
Тачан одоговор	**Г**	**В**	**В**

Задатак 4. Број је дељив са 4 ако и само ако је његов двоцифрени завршетак дељив са 4. Пошто се траже бројеви са различитим цифрама, могући двоцифрени завршеци су: 04, 08, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 48, 52, 56, 60, 64, 68, 72, 76, 80, 84, 92, 96.

У случајевима када се појављује цифра 0 (има их 6) прве две цифре бирамо на $8 \cdot 7 = 56$ начина, а у осталих 16 случајева прве две цифре бирамо на $7 \cdot 7 = 49$ начина.

Дакле, тражених бројева има укупно $6 \cdot 56 + 16 \cdot 49 = 1120$.

КАТЕГОРИЈА 3 - ПРВИ И ДРУГИ РАЗРЕД

(I) **Алгебра и бројеви**

Број задатка	1	2	3
Тачан одоговор	**В**	**А**	**Д**

Задатак 4. Нека је k произвољан природан број. Тада сваких $2k+1$ узастопних природних бројева можемо записати на следећи начин

$$n-k, \ldots, n-1, n, n+1, \ldots, n+k \quad (\star)$$

за неки природан број n који је већи од k.

Након сређивања, добија се да је једнакост

$$(n-k)^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 = (n+1)^2 + \ldots + (n+k)^2$$

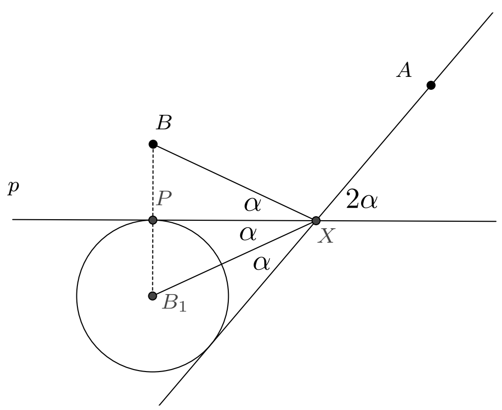
еквивалентна с једнакошћу $n = 2k(k+1)$.

Ако за n узмемо природан број $2k(k+1)$, онда ће важити $n > k$ и $n = 2k(k+1)$, па ће за бројеве $(\star)$ важити тврђење задатка.

(II) **Геометрија**

Број задатка	1	2	3
Тачан одоговор	**В**	**Д**	**Д**

Задатак 4. Нека је B_1 тачка симетрична тачки B у односу на праву p. Опишимо круг са центром у B_1 коме је права p тангента и на овај круг конструишимо тангенту из тачке A. Тачка пресека праве p и ове тангенте је тражена тачка X. Нека је P подножје нормале из тачке B на p, сада је $\measuredangle BXP = \measuredangle PXB_1 = \measuredangle B_1XQ$.



(III) **Комбинаторика**

Број задатка	1	2	3
Тачан одоговор	**Б**	**Г**	**А**

Задатак 4. Због симетричности таблица симетричних релација, елементи записани изнад главне дијагонале одређују и елементе испод главне дијагонале. Како се главна дијагонала може произвољно попунити, то места у таблици која одређују ову релацију има $1+2+\ldots+2016 = \dfrac{2017 \cdot 2016}{2} = 2017 \cdot 1008$. Како се на сваком месту може уписати $\top$ или $\perp$ то оваквих релација има укупно $2^{2017 \cdot 1008}$.